НВУЗ АНО
«Региональный финансово-экономический институт»

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ по учебной дисциплине «МАТЕМАТИКА»

http://elearning.rfei.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Уважаемые студенты!

Рассматривая курс математики, мы говорили, что математика – одна из древних наук, ее возраст исчисляется тысячелетиями, в то время как информатика, изучающая способы и средства работы с информацией, и тем более информационные технологии существуют всего несколько десятков лет. Но вместе с тем их стремительное развитие за последние годы существенно изменило человеческое общество и жизнь каждого человека.

Возможности, которые представлены человеку информационными технологиями в настоящее время, огромны. Любой образованный человек, вне зависимости от его специальности (естественнонаучной или гуманитарной) должен иметь представление как о математике, так и о современных информационных технологиях, помогающих в освоении математики и других дисциплин.

Более того, для эффективного применения математических методов и современных информационных технологий в своей деятельности специалист должен уметь отбирать из предлагаемых математикой и информатикой возможностей наиболее подходящие инструменты решения стоящих перед ним конкретных задач. Кроме того, любой специалист должен иметь навыки работы с компьютером, пакетами прикладных программ, уверенно пользоваться возможностями Интернет.

Согласно учебному плану института после изучения курса математики вам необходимо выполнить компьютерный практикум по этой дисциплине.

Компьютерный практикум представлен тремя лабораторными работами, реализуемыми в программном продукте MS Excel.

В каждой из предложенных лабораторных работ компьютерного практикума рассматривается последовательный ход ваших действий за компьютером, который снабжен не только описанием, но и результатом (рисунком), отображаемым на экране компьютера.

Будьте внимательны, следуйте за описанием работы при выполнении каждой из лабораторных работ за компьютером, сверяйте результат, полученный вами, с результатом, который представлен в работе.

Каждая из трех лабораторных работ содержит задания для самостоятельного выполнения. Обязательно выполните эти задания и сверьте ваши результаты с ответами, предложенными в заданиях.

Завершением компьютерного практикума будет выполнение вами контрольного компьютерного практикума, представленного 25 заданиями.

Желаем вам успехов в выполнении компьютерного практикума!

Лабораторная работа № 1

Здравствуйте!

Вы приступаете к реализации компьютерного практикума в разделе «Линейная алгебра». В ходе первой лабораторной работы Вы научитесь выполнять вычисление определителей любого порядка разложением по элементам любого ряда, находить произведение матриц.

При отсутствии компьютера лабораторные работы можно выполнять вручную, но этот процесс будет более трудоемким.

Напомним теоретические сведения из лекционного материала (глава 1.6) этого раздела. Практическое вычисление определителей основано на формуле разложения определителя по элементам строки (столбца):

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \tag{1}$$

Учитывая связь между алгебраическими дополнениями и минорами:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, можно записать:

$$\Delta = a_{ij}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + \ldots + \\ + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in} \tag{2}$$

С помощью этой формулы вычисление определителя Δ n-ого порядка сводится к вычислению ряда определителей (n - 1)-го порядка. Каждый из этих определителей, в свою очередь, можно свести к определителям (n - 2)-го порядка, эти последние – к определителям порядка n - 3 и т. д. В конечном счёте, вычисление Δ сводится к вычислению ряда определителей 3-го порядка или, при желании, даже 2-го. Последние вычисляются непосредственно.

Пусть нам дан определитель 4-го порядка, имеющий следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

который можно вычислить разложением его по элементам любого ряда.

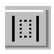
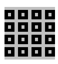
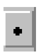
Разложим определитель по 1-й строке. Запишем процесс разложения определителя 4-го порядка по 1-й строке, используя формулу (2) в текстовом редакторе *Word*, а процесс вычисления будем производить в *Excel*, функционирующих в операционной системе *Windows*.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 2 \bullet (-1)^{1+1} \bullet \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 10 & 9 & 7 \\ 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} + 5 \bullet (-1)^{1+2} \bullet \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 4 \bullet (-1)^{1+3} \bullet \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 10 & 7 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} + 1 \bullet (-1)^{1+4} \bullet \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 9 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Формулу (4) необходимо переписать на экран компьютера, для чего необходимо войти в программу *Word* после выполнения следующих операций:

1. Включите компьютер.
2. После того как на экране монитора появится рабочий стол операционной системы *Windows*, откройте окно *Microsoft Word*.
3. Вставьте объект *Microsoft Equation 3.0* (**Вставка→Объект→Microsoft Equation 3.0**)
4. Перепишите формулу (4) в формульном редакторе. Для этого:

- вставьте шаблон определителя 4-го порядка в формульном редакторе: выполните нажатие ЛКМ (левой кнопки мыши) в **Шаблоне скобок** на шаблон , а в **Шаблоне матриц** на шаблон .
- Занесите числовые значения элементов определителя 4-го порядка в свободные поля.
- С клавиатуры занесите знак «=» и число 2, после чего выполните нажатие ЛКМ на кнопке **Операторы** и выберите **Шаблон вида** .

- Запишите число $(-1)^{1+1}$, используя Шаблон верхних индексов, (рис. 1).

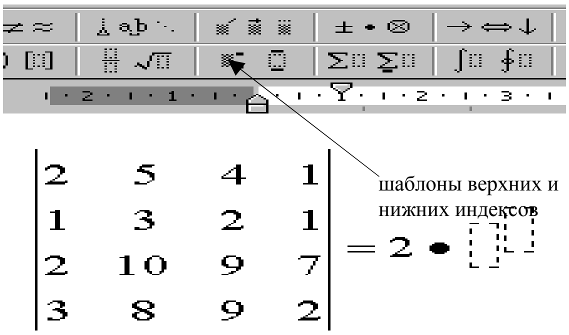


Рисунок 1

Теперь повторением предыдущих операций набираем оператор ▪ и формируем первый определитель третьего порядка справа в (4), после чего набор первого слагаемого в (4) завершен (рис. 2).

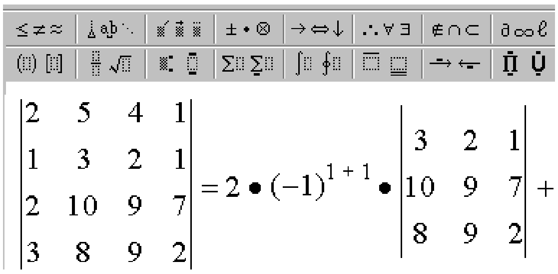


Рисунок 2

Остальные слагаемые в (4) набираются в окне редактора формул по аналогии (см. рисунок 3).

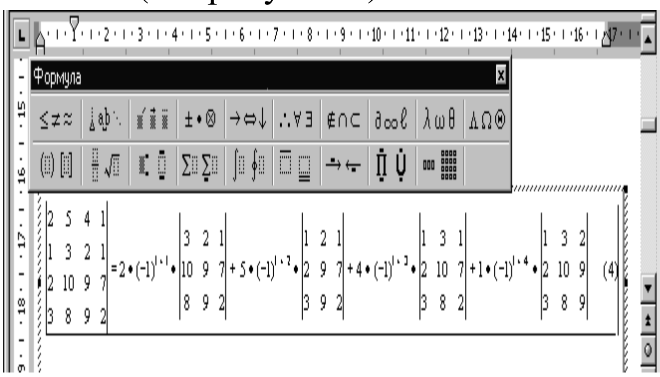


Рисунок 3

Итак, программа *Word* позволила ввести на экран компьютера вычислительный алгоритм (4). В качестве вычислительного средства воспользуемся инструментами программы *MS Excel.*

5. Откройте окно Microsoft Excel.

6. Прежде чем перейти к вычислениям, следует научиться одновременно работать с двумя окнами: Word и Excel. Это нужно для того, чтобы, не используя бумагу и ручку, переписать данный определитель 4-го порядка из программы Word в программу Excel и далее записать определители 3-го порядка, полученные из определителя 4-го порядка путём разложения его по элементам 1-й строки. Для этого:

- подведите указатель мыши к строке заголовка окна *Microsoft Word* и выполните нажатие ЛКМ на кнопке **Восстановить** (**Развернуть**) , после чего размеры окна уменьшатся.
- То же самое надо проделать с окном *Microsoft Excel*. Если размеры обоих окон уменьшились ненамного, то с помощью указателя мыши их можно уменьшить ровно настолько, насколько нам будет удобно для дальнейшей работы. Для этого надо:
- подвести указатель мыши к правой границе окна Microsoft Word (Microsoft Excel);
- после того как указатель мыши примет следующий вид  (рис. 4), выполните нажатие ЛКМ и, удерживая ее, сместите границу окна влево;
- перетащите окна в удобное для вас место экрана (рисунок 4).

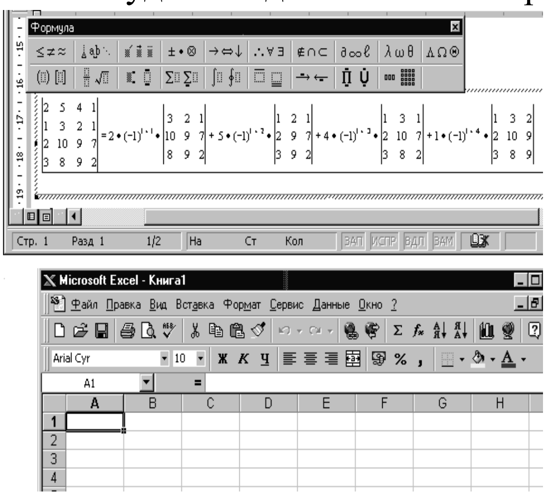


Рисунок 4

7. Для проведения вычислений предварительно все определители, изображенные на экране редактора формул (рисунок 4), занесите на экран программы *Excel*. Для этого:

- Заполните ячейки таблицы *Excel* значениями элементов определителя. Экран *Excel* принимает вид (см. рисунок 5).

D4 = 2

	A	B	C	D	E
1	2	5	4	1	
2	1	3	2	1	
3	2	10	9	7	
4	3	8	9	2	

Рисунок 5

Для занесения оставшихся определителей в ячейки *Excel* необходимо окно *Excel* передвинуть вверх, чтобы были видны свободные строки, расположенные ниже уже занесенного определителя.

- Выполните нажатие ЛКМ на кнопке, которая расположена в правом нижнем углу окна *Microsoft Excel* до тех пор, пока рабочее поле окна не будет содержать достаточное количество свободных строк.
- Заполните ячейки *Excel* по указанной технологии всеми оставшимися определителями.
- Далее разверните окно *Excel*: выполните нажатие ЛКМ на кнопке **Восстановить** (**Развернуть**), которая находится в верхней правой части строки заголовка (рисунок 4), после чего окно вновь приобретет первоначальные размеры.

После проделанных выше действий экран программы *Excel* примет вид (см. рисунок 6).

G12 = 9

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	2	5	4	1				
2	1	3	2	1				
3	2	10	9	7				
4	3	8	9	2				
5								
6	3	2	1		1	2	1	
7	10	9	7		2	9	7	
8	8	9	2		3	9	2	
9								
10	1	3	1		1	3	2	
11	2	10	7		2	10	9	
12	3	8	2		3	8	9	
13								

Рисунок 6

8. Вычисления будем производить в следующем порядке:

- сделайте активной ячейку D9.
- с клавиатуры занесите в нее выражение =A1*степень(-1;2)*, после чего для вычисления первого определителя третьего порядка воспользуйтесь функцией МОПРЕД, которая находится в мастере функций f_x.

Результат появится в ячейке D9 (см. рисунок 7).

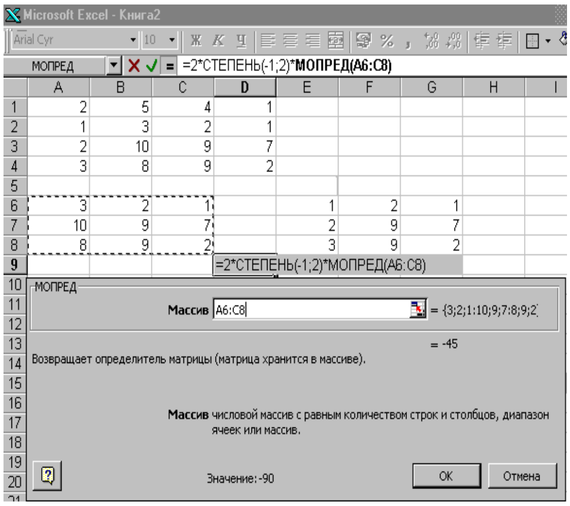


Рисунок 7

Итак, мы нашли первый определитель третьего порядка, он равен (-45). Но при умножении на число 2 в соответствии с формулой (4), получили первое слагаемое формулы (4) равно (-90). Аналогичным способом посчитаем оставшиеся три слагаемых, не забывая при этом умножать определитель на соответствующие числа, получающиеся на пересечении вычеркнутой первой строки и попеременно вычеркнутого столбца, см. формулу 4. Их значения будем находить в ячейках H9, D13, H13.

Вычисления проводим, используя функцию МОПРЕД.

Теперь осталось найти их сумму. Для этого:

- сделайте активной ячейку I15;
- занесите с клавиатуры в нее выражение =D9+H9+D13+H13;
- нажмите на клавишу **Enter**.

Результат вычислений появится в ячейке I15 (см. рисунок 8).

9. Быструю проверку проделанных вычислений также произведем в *Excel*.

- Активизируйте ячейку E5.
- Воспользуйтесь функцией МОПРЕД, которая находится в мастере функций f_x (выполните нажатие ЛКМ на 1-й элемент определителя, который находится в ячейке A1, и перетащите указатель мыши по главной диагонали до ячейки D4).

Результат вычислений появится в ячейке E5 (см. рисунок 9), который подтверждает правильность предыдущих вычислений.

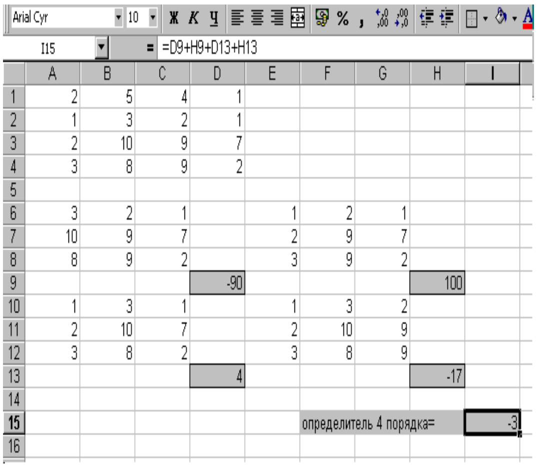


Рисунок 8

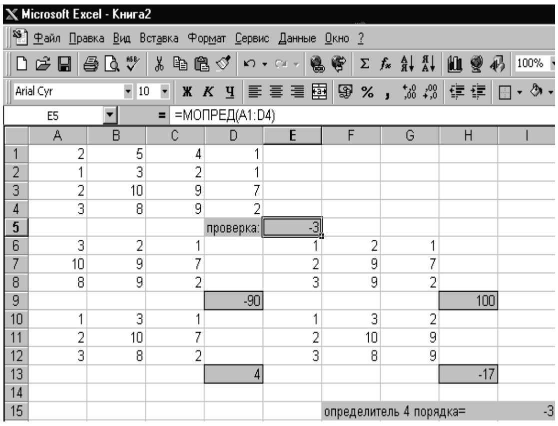


Рисунок 9

Если бы данная задача решалась с использованием языков программирования, то все промежуточные расчеты не были бы замечены пользователем, что не способствует приобретению вычислительных навыков.

Возможности *Excel* позволяют решать задачу автоматически с помощью программы **Мастер функций,** встроенной в *Excel*, или в полуавтоматическом режиме, что позволяет вычислительным путем освоить формулу (1).

Аналогичным образом можно вычислить определитель, разложив его по элементам столбца. Пусть нам дан определитель 4-го порядка, имеющий следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

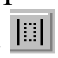
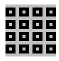
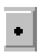
Разложим определитель по первому столбцу. Запишем процесс разложения:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 2 \bullet (-1)^{1+1} \bullet \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 10 & 9 & 7 \\ 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} + 1 \bullet (-1)^{2+1} \bullet \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 10 & 9 & 7 \\ 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$2 \bullet (-1)^{3+1} \bullet \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} + 3 \bullet (-1)^{4+1} \bullet \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 9 & 7 \end{vmatrix} \qquad (5)$$

Формулу (5) необходимо переписать на экран компьютера, для чего нужно:

1. Загрузить программу *Word*;
2. Вставив объект *Microsoft Equation 3.0*, переписать формулу (5) в формульном редакторе. Для этого:

- вставьте шаблон определителя 4-го порядка в формульном редакторе: выполните нажатие ЛКМ в **Шаблоне скобок** на шаблон , а в **Шаблоне матриц** – на шаблон ;
- занесите числовые значения элементов определителя 4-го порядка в свободные поля;
- с клавиатуры занесите знак «=» и число 2, после чего выполните нажатие ЛКМ на кнопке **Операторы** и выберите шаблон вида ;
- запишите число $(-1)^{1+1}$, используя **Шаблон верхних индексов**;

- повторением предыдущих операций запишите всю формулу (5) в редакторе формул.
- используя программу *Word*, выведите на экран компьютера вычислительный алгоритм (см. рисунок 10).

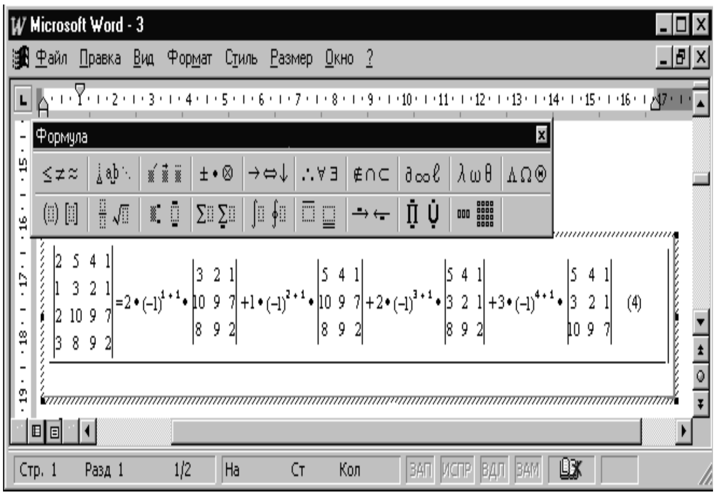


Рисунок 10

В качестве вычислительного средства мы снова воспользуемся инструментами программы *Excel*.

3. Откройте окно *Microsoft Excel*.
4. Перепишите формулу (4) из *Word* в *Excel*.

Подсчитаем 1-й множитель формулы (5). Для этого:

- активизируйте ячейку D9, после чего занесите с клавиатуры в неё формулу =2*степень(-1;2);
- выполните нажатие ЛКМ на кнопке **Мастер функций** f_x и воспользуйтесь функцией МОПРЕД, выделяя область A6÷C8;
- нажмите на клавишу **Enter** (результат см. на рисунок 11).

D9 = =2*СТЕПЕНЬ(-1;2)*МОПРЕД(A6:C8)

	A	B	C	D	E	F	G
1	2	5	4	1			
2	1	3	2	1			
3	2	10	9	7			
4	3	8	9	2			
5							
6	3	2	1		5	4	1
7	10	9	7		10	9	7
8	8	9	2		8	9	2
9				-90			
10	5	4	1		5	4	1
11	3	2	1		3	2	1
12	8	9	2		10	9	7

Рисунок 11

Аналогичным способом подсчитайте три оставшихся множителя формулы (5).

- Активизируйте ячейку H13 и занесите в неё с клавиатуры результат сложения всех четырёх множителей.

I14 = =D9+H9+D13+H13

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	2	5	4	1				
2	1	3	2	1				
3	2	10	9	7				
4	3	8	9	2				
5								
6	3	2	1		5	4	1	
7	10	9	7		10	9	7	
8	8	9	2		8	9	2	
9				-90				63
10	5	4	1		5	4	1	
11	3	2	1		3	2	1	
12	8	9	2		10	9	7	
13				-12				36

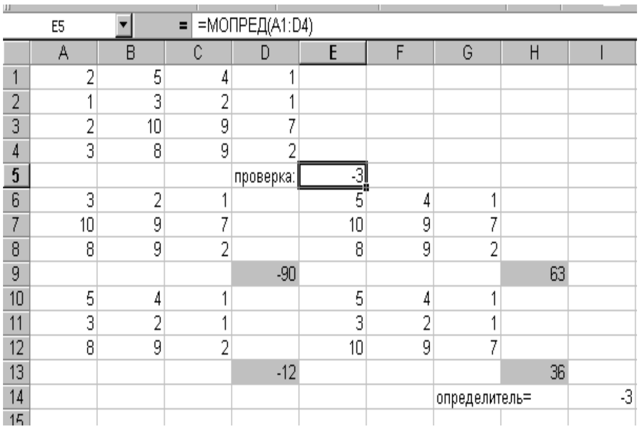
Рисунок 12

- Нажмите на клавишу **Enter** (см. рисунок 12).

5. Произведём быструю проверку проделанных вычислений.

- активизируйте ячейку E5;
- воспользуйтесь функцией МОПРЕД, которая находится в мастере функций f_x (выполните нажатие ЛКМ на 1-й элемент определителя, который находится в ячейке A1, и перетащите указатель мыши по главной диагонали до ячейки D4).

Результат вычислений появится в ячейке E5 (см. рисунок 13), который подтверждает правильность предыдущих вычислений.



E5 = =МОПРЕД(A1:D4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	2	5	4	1					
2	1	3	2	1					
3	2	10	9	7					
4	3	8	9	2					
5				проверка:	-3				
6	3	2	1		5	4	1		
7	10	9	7		10	9	7		
8	8	9	2		8	9	2		
9				-90				63	
10	5	4	1		5	4	1		
11	3	2	1		3	2	1		
12	8	9	2		10	9	7		
13				-12				36	
14							определитель=		-3
15									

Рисунок 13

Следующая часть лабораторной работы посвящена рассмотрению вопроса умножения матриц средствами компьютерных технологий, но прежде напомним основные теоретические выкладки по этому вопросу.

Произведение матрицы A на матрицу B определяется в предположении, что число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix}$$

Пусть даны матрица А размера $[n \times m]$ и матрица В размера $[m \times p]$.

Произведением двух ***матриц A*** и ***B***, заданных в определённом порядке (A – первая, B – вторая), называется матрица C размера $[n \times p]$, элементы c_{ij} которой определяются по следующему правилу: элемент i-й строки и j-го столбца матрицы С равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В (см. рисунок 14).

$$\mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{n}\,; \quad \mathrm{j} = 1,2,\ldots,\mathrm{p}\,;$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{im}b_{mj} = \sum a_{is}b_{sj} \qquad (6)$$

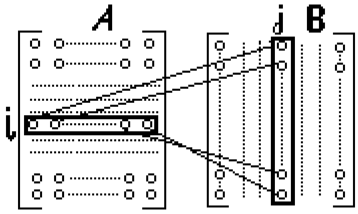


Рисунок 14

Как мы уже говорили в первом разделе курса математики, умножение матриц не обладает свойством перестановочности.

Поэтому, если оба произведения *AB* и *BA* имеют смысл, то *AB* может не совпадать с *BA*. В том случае, когда оба произведения *AB* и *BA* определены и выполняется равенство *AB*=*BA*, матрицы *A* и *B* называют перестановочными.

Пусть нам даны две матрицы *A* и *B*, где матрица *A* имеет размерность [5x6], а матрица *B* имеет размерность [6x7].

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{и}$$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -5 & -7 & -2 & 2 & -2 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 6 & -1 & 15 & -5 & 5 \\ 5 & -4 & 10 & 1 & 14 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем произведение матриц *AB*, используя формулу 6. Для этого каждый элемент первой строки будем умножать на соответствующий элемент первого столбца, получим первый элемент матрицы произведения, назовем его c_{11}.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -5 & -7 & -2 & 2 & -2 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 6 & -1 & 15 & -5 & 5 \\ 5 & -4 & 10 & 1 & 14 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -24 & -16 & 7 & -20 & 58 & 26 \\ 53 & -2 & 38 & 1 & 107 & 19 & 51 \\ 58 & -5 & 60 & 2 & 147 & 31 & 56 \\ 16 & -7 & 14 & 2 & 27 & 17 & 19 \\ 89 & -3 & 86 & 1 & 156 & 16 & 77 \end{pmatrix}$$

где $c_{11} = 4 \cdot (-5) + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 6 + (-1) \cdot 5 + 8 \cdot 3 = -3$

$$c_{12} = 4 \cdot (-7) + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot (-4) + 8 \cdot 0 = -24,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$c_{57} = 1 \cdot 1 + 7 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 77$$

Далее, как указано выше найдем элемент c_{12} и т. д. Как видно из примера, вычисление элементов матрицы представляет собой громоздкий процесс, поэтому здесь для подсчета элементов матрицы *C* удобно воспользоваться программой *Excel*. Матрицы *A* и *B* необходимо переписать на экран компьютера программного пакета *Word* аналогично предыдущим заданиям, выполненным на первой странице лабораторной работы (рисунок 1). Результатом ваших действий должно стать то, что изображено на рисунке 15.

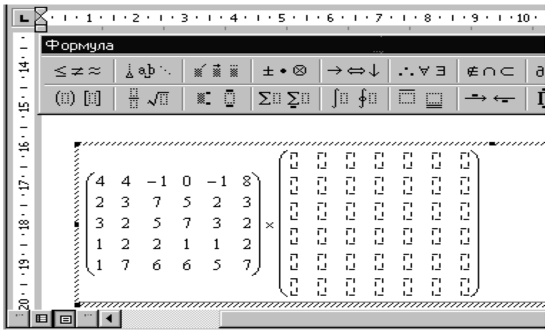
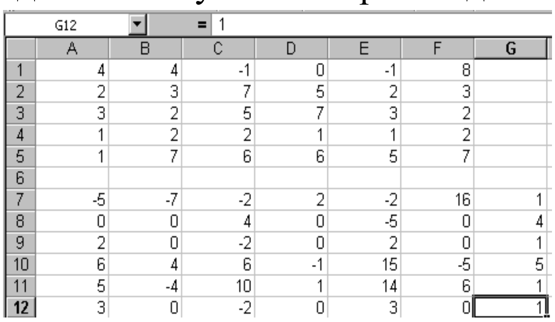


Рисунок 15

Для выполнения вычислений воспользуемся инструментами программы *Excel*.

1. Откройте окно *Microsoft Excel*.
2. Перепишите матрицы А и В из *Word* в Excel (см. рисунок 16).
3. Чтобы подсчитать элементы матрицы С, воспользуемся функцией СУММПРОИЗВ, которая находится в **Мастере функций** f_x и перемножает все компоненты двух массивов, а затем складывает полученные произведения.



G12 = 1

	A	B	C	D	E	F	G
1	4	4	-1	0	-1	8	
2	2	3	7	5	2	3	
3	3	2	5	7	3	2	
4	1	2	2	1	1	2	
5	1	7	6	6	5	7	
6							
7	-5	-7	-2	2	-2	16	1
8	0	0	4	0	-5	0	4
9	2	0	-2	0	2	0	1
10	6	4	6	-1	15	-5	5
11	5	-4	10	1	14	6	1
12	3	0	-2	0	3	0	1

Рисунок 16

Но вышеназванную операцию функция может осуществить, если аргументы, которые являются массивами, имеют одинаковые размерности. В нашем примере матрицы A и B имеют разные размерности. Поэтому, чтобы воспользоваться данной функцией, прежде транспонируем матрицу B. Для этого:

- активизируйте ячейку A7;
- выполните нажатие ЛКМ на ячейке A7 и перетащите курсор по главной диагонали до ячейки G12;
- отпустите ЛКМ, при этом область A7÷G12 окажется выделенной;
- выполните нажатие ПКМ (правой кнопки мыши), после чего на экране компьютера появится контекстное меню;
- выполните нажатие ЛКМ на слове **Копировать** (рисунок 17);

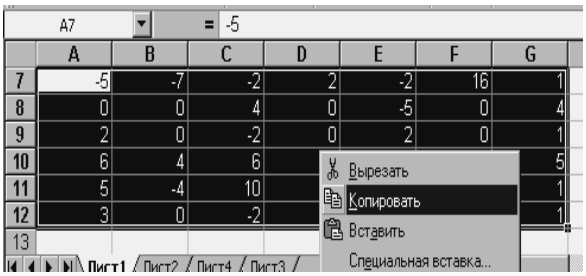


Рисунок 17

- активизируйте ячейку A14;
- в строке меню выполните нажатие ЛКМ на кнопке **Правка**, а затем в открывшемся контекстном меню выполните то же самое действие на кнопке **Специальная вставка** (рисунок 18);

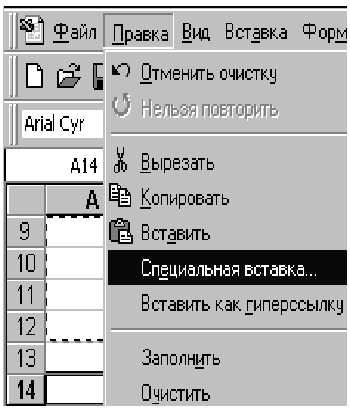


Рисунок 18

- в открывшемся окне выполните нажатие ЛКМ на **Транспонировать** (рисунок 19);

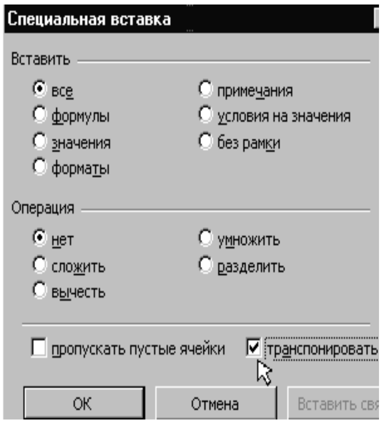
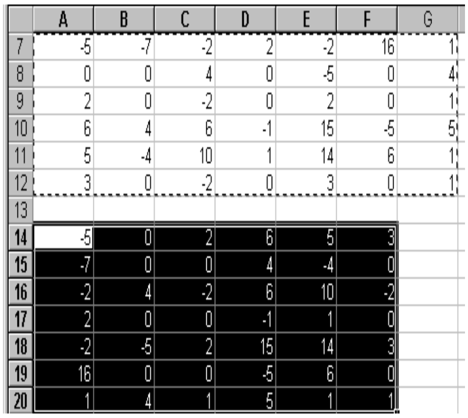


Рисунок 19

- выполните нажатие ЛКМ на **ОК**; результат см. на рисунке 20.



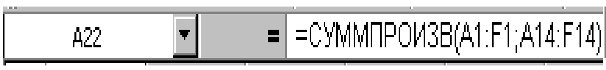
	A	B	C	D	E	F	G
7	-5	-7	-2	2	-2	16	1
8	0	0	4	0	-5	0	4
9	2	0	-2	0	2	0	1
10	6	4	6	-1	15	-5	5
11	5	-4	10	1	14	6	1
12	3	0	-2	0	3	0	1
13							
14	-5	0	2	6	5	3	
15	-7	0	0	4	-4	0	
16	-2	4	-2	6	10	-2	
17	2	0	0	-1	1	0	
18	-2	-5	2	15	14	3	
19	16	0	0	-5	6	0	
20	1	4	1	5	1	1	

Рисунок 20

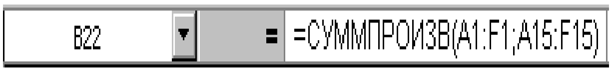
В результате проделанных действий на экране *Excel* появится матрица $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ (рис. 20), при помощи которой мы сможем осуществить поставленную задачу.

4. Вычисления будем производить следующим образом:

- активизируйте ячейку A22;
- воспользуйтесь функцией СУМПРОИЗВЕД, которая находится в **Мастере функций** f_x в категории МАТЕМАТИЧЕСКИЕ



- для вычисления второго элемента 1-ой строки необходимо ввести в ячейку B22 следующие строки



и т.д.;

- формула вычисления 7-го элемента 1-ой строки будет иметь следующий вид:

G22 = =СУММПРОИЗВ(A1:F1;A20:F20)

и т.д.;
- в ячейке A26 разместим 1-ый элемент последней строки матрицы С:

A26 = =СУММПРОИЗВ(A5:F5;A14:F14)

- в ячейке G26 окажется последний элемент последней строки матрицы С:

G26 = =СУММПРОИЗВ(A5:F5;A20:F20)

При этом в окне программы появятся следующие числа (рисунок 21).

На рисунке 21 элементы матрицы С располагаются в ячейках A22÷G26.

G26 = =СУММПРОИЗВ(A5:F5;A20:F20)

	A	B	C	D	E	F	G
16	-2	4	-2	6	10	-2	
17	2	0	0	-1	1	0	
18	-2	-5	2	15	14	3	
19	16	0	0	-5	6	0	
20	1	4	1	5	1	1	
21							
22	-3	-24	-16	7	-20	58	26
23	53	-2	38	1	107	19	51
24	58	-5	60	2	147	31	56
25	16	-7	14	2	27	17	19
26	89	-3	86	1	156	16	77

Рисунок 21

5. Быструю проверку проделанных вычислений произведём также в программе *Excel*. Для этого:

- активизируйте ячейку A28;
- выделите область A28÷G32;
- воспользуйтесь функцией МУМНОЖ, которая находится в **Мастере функций** f_x в категории МАТЕМАТИЧЕСКИЕ, где в окне Массив 1 выделите область A1:F5, а в окне Массив 2 выделите область A7:G12 (рисунок 22);

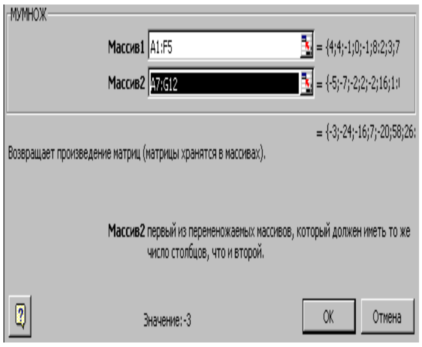


Рисунок 22

- на клавиатуре одновременно нажмите следующую комбинацию клавиш: **Shift+Ctrl+Enter**.

В результате чего в ячейках появятся следующие значения (рисунок 23). Полученные значения доказывают правильность произведённых вычислений.

	A	B	C	D	E	F	G
28	-3	-24	-16	7	-20	58	26
29	53	-2	38	1	107	19	51
30	58	-5	60	2	147	31	56
31	16	-7	14	2	27	17	19
32	89	-3	86	1	156	16	77

Рисунок 23

ПРИМЕЧАНИЕ

В главе 1.5 первой части курса математики мы говорили о том, как можно выполнить транспонирование матрицы с помощью **Мастера функций** f_x.

Поэтому предлагаем вам самостоятельно выполнить транспонирование матрицы В с помощью функции ТРАНСП, которая находится в категории Ссылки и массивы **Мастера функций** f_x. Убедитесь, что результаты совпадут.

В завершении рассмотрения первой лабораторной работы компьютерного практикума предлагаем вам самостоятельно выполнить представленные ниже задания, которые снабжены ответами для контроля.

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислите определитель, разложив его по элементам второй строки:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ответ: 2.

2. Вычислите определитель, разложив его по элементам четвертого столбца:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Ответ: 14.

3. Вычислите определитель, разложив его по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

Ответ: -6

4. Найти произведение матриц АВ вручную и проверить результат в пакете *MS Excel*:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A \cdot B = \begin{pmatrix} -13 & -32 & 3 \\ 1 & -9 & -4 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Найти произведение матриц ВА вручную и проверить результат в пакете *MS Excel*:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & -6 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $B \cdot A = \begin{pmatrix} -11 & 10 & 27 \\ 1 & 0 & -27 \\ 8 & 20 & 12 \end{pmatrix}$.

6. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 6 & 9 & 2 \\ 10 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 9 \end{pmatrix}$.

Вычислить произведение транспонированных матриц $A^T \cdot B^T$.

Ответ: $A^T \cdot B^T = \begin{pmatrix} 74 & 40 & 154 \\ 51 & 30 & 111 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Конец лабораторной работы № 1

Лабораторная работа № 2

Уважаемые студенты!

Вы приступаете к выполнению лабораторной работы по вычислению ранга матрицы, нахождению обратной матрицы, решению систем линейных уравнений матричным методом и методом Гаусса.

Напомним теоретические сведения, известные Вам из первого раздела курса математики. В частности, если в матрице A размерности $[n \times m]$ выделить произвольно k строк и k столбцов, то элементы, стоящие на пересечении выделенных столбцов и строк, образуют квадратную матрицу k-ого порядка. Определитель этой матрицы называется минором k-ого порядка матрицы A.

Очевидно, что матрица A обладает минорами любого порядка от 1 до наименьшего из чисел m и n. Среди всех отличных от нуля миноров матрицы A найдется по крайней мере один минор, порядок которого будет наибольшим.

Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется **рангом матрицы**.

Если все элементы матрицы A равны нулю, то говорят, что ранг матрицы A равен нулю. Если ранг матрицы A равен r, то это означает, что в матрице A имеется, по крайней мере, один, отличный от нуля минор порядка r, но всякий минор порядка, большего, чем r, равен нулю. Ранг матрицы A обозначается $r(A)$.

Очевидно, что всегда выполняется соотношение

$0 \le r \le \min(m, n)$.

Пусть нам дана матрица A, имеющая следующий вид:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Чтобы вычислить ранг матрицы A, необходимо с помощью элементарных преобразований привести ее к такому виду, в котором все элементы, располагающиеся ниже главной диагонали, были равны нулю. Для этого произведем анализ строк матрицы

A. Интерес вызывает 2-я строка, в которой 1-й элемент равен 1, следовательно, используя свойства во всех строках, кроме этой, можно получить ряд нулевых элементов с помощью следующих преобразований над строками:

к элементам 1-ой строки прибавим элементы 2-ой, умноженные на (-2);

к элементам 3-ей строки прибавим элементы 2-ой, умноженные на (-2);

к элементам 4-ой строки прибавим элементы 2-ой, умноженные на (-3).

В результате получим матрицу Ā~A (эквивалентную данной):

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

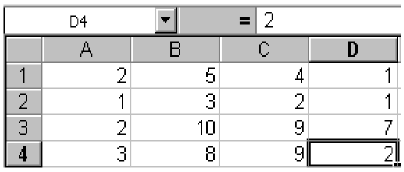
где вторая строка матрицы A становится первой строкой в матрице $\bar{A}$.

В качестве вычислительного средства воспользуемся инструментами программы *Excel*. Для этого:

1. Включите компьютер, откройте окно *Microsoft Excel*.
2. Заполните ячейки таблицы значениями матрицы A (рисунок 1).

После появления на экране компьютера матрицы A осуществляется указанный выше анализ строк. Для выполнения выбранного словесного алгоритма производим следующие действия.

- Активируйте ячейку A5 и занесите в нее с клавиатуры формулу $=\text{A}1+\text{A}2*(-2)$, завершите ввод клавишей **Enter**. Результат занесите автозаполнением в ячейки B5÷D5 (выделить ячейку A5, навести указатель на нижний правый угол, появившийся черный плюс протащить до ячейки D5 при нажатой левой кнопке мыши).

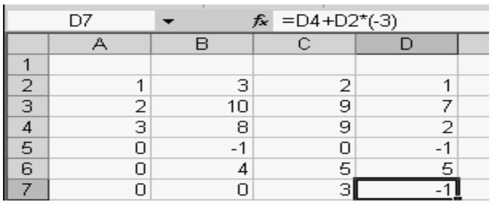


D4 = 2

	A	B	C	D
1	2	5	4	1
2	1	3	2	1
3	2	10	9	7
4	3	8	9	2

Рисунок 1

- В ячейке А6 разместите результат прибавления к 3-ей строке 2-ой, умноженной на (-2). Результат, полученный в ячейке, автозаполнением занесите в ячейки В6÷D6.
- В ячейке А7 запишем формулу$= \mathrm{A}4 + \mathrm{A}2 * (-3)$), после чего автозаполнением заполним ячейки В7÷D7 (см. рисунок 2).



D7 fx =D4+D2*(-3)

	A	B	C	D
1				
2	1	3	2	1
3	2	10	9	7
4	3	8	9	2
5	0	-1	0	-1
6	0	4	5	5
7	0	0	3	-1

Рисунок 2

В результате проделанных вычислений строки матрицы $\bar{A}$ оказались в ячейках А2÷D2, А5÷D5, А6÷D6, А7÷D7.

3. Снова, глядя на экран компьютера, анализируем строки и составляем следующий словесный алгоритм, позволяющий преобразовать матрицу $\bar{A}$ так, чтобы в ней появились нулевые элементы ниже главной диагонали:
   прибавим к 3-ей строке 2-ю, умноженную на число 4;
   прибавим к элементам 4-ой строки элементы 2-ой строки, умноженные на число (-1).
   В результате получим новую матрицу $B \sim \bar{A}$.
   $$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Реализация этого словесного алгоритма производится следующим образом.

- Активизируем ячейку А8 и запишем в нее формулу$= \mathrm{A}6 + \mathrm{A}5 * 4$, а затем численный результат, полученный в ней, занесем автозаполнением в ячейки А7÷D7.

- В ячейке А9 разместим результат прибавления 5-ой строки, умноженной на число (-1), к 7-ой, после чего автозаполнением занесем численные результаты в ячейки А9÷D9.

4. Анализируя строки полученной матрицы, составляем следующий словесный алгоритм, позволяющий окончательно преобразовать матрицу $B \sim B'$. Для этого:

- прибавим к 3-ей строке матрицы B 4-ю строку, умноженную на число (-5) и деленную на число 3. Матрица $B' \sim A$ будет иметь следующий вид:

$$\boldsymbol{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Активируем ячейку А10 и запишем в нее формулу $= \mathrm{A8} + \mathrm{A9} * \dfrac{(-5)}{3}$, а затем численный результат, полученный в ней, занесем автозаполнением в ячейки А10÷D10, см. рисунок 3.

D10 =D8+D9*(-5/3)

	A	B	C	D
1				
2	1	3	2	1
3	2	10	9	7
4	3	8	9	2
5	0	-1	0	-1
6	0	4	5	5
7	0	0	3	-1
8	0	0	5	1
9	0	0	3	0
10	0	0	0	1

Рисунок 3

5. Элементы преобразованной матрицы B' находятся в строках 2, 5, 9 и 10. Для того чтобы все другие строки не мешали подсчету ранга матрицы B', воспользуемся пунктом меню **ФОРМАТ** и скроем их.

   Для этого:

- наведите курсор на ячейку А3 и после того, как он примет следующий вид ✚, выполните нажатие ЛКМ на ячейке А3 и протащите его до ячейки D4;
- отпустите кнопку мыши, при этом диапазон ячеек А3÷D4 окажется выделенным другим цветом;

- в строке меню выполните нажатие ЛКМ на пункте **ФОРМАТ→СТРОКА** и затем выполните нажатие ЛКМ на пункте **СКРЫТЬ** (рисунок 4).

Рисунок 4

После проделанных действий на экране монитора возникнет следующее изображение (рисунок 5).

A3 = 2

	A	B	C	D
2	1	3	2	1
5	0	-1	0	-1
6	0	4	5	5
7	0	-1	3	-1
8	0	0	5	1
9	0	0	3	0
10	0	0	0	1

Рисунок 5

Аналогичным способом скройте строки 1, 6, 7, 8. Экран программы *Excel* примет вид (рисунок 6).

	A	B	C	D
1				
2	1	3	2	1
5	0	-1	0	-1
9	0	0	3	0
10	0	0	0	1

Рисунок 6

С помощью элементарных преобразований над строками матрицы A мы получили матрицу B', эквивалентную матрице A. При этом ее ранг равен 4, и равен рангу исходной матрицы A.

Далее рассмотрим технологию нахождения обратной матрицы. В главе 1.6. курса математики мы говорили об использовании компьютерных технологий при решении этих задач, находили матрицу, обратную к матрице третьего порядка. Сейчас мы рассмотрим эту задачу на примере матрицы четвертого порядка.

Пусть матрица A имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти матрицу A^{-1}, обратную для матрицы А, необходимо:

- вычислить определитель матрицы $(\Delta A = -3)$;
- найти алгебраические дополнения элементов a_{ij} в определителе матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 10 & 9 & 7 \\ 8 & 9 & 2 \end{vmatrix}, \quad A_{12} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 10 & 7 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} \quad A_{14} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 9 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix},$$

$$A_{21} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 10 & 9 & 7 \\ 8 & 9 & 2 \end{vmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 7 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix},$$

$$A_{24} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 2 & 10 & 9 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 9 & 2 \end{vmatrix},$$

$$A_{32} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix},$$

$$A_{34} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad A_{41} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 9 & 7 \end{vmatrix},$$

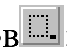
$$A_{42} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \end{vmatrix}, \quad A_{43} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 10 & 7 \end{vmatrix},$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 9 \end{vmatrix}.$$

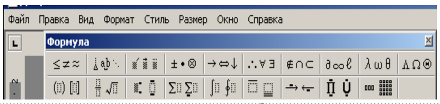
- составить присоединенную матрицу C (для этого элементы исходной матрицы A заменяются найденными алгебраическими дополнениями, а затем полученную матрицу транспонируют);
- разделить все элементы матрицы C на $\Delta A = -3$.

Реализуем вышеизложенный алгоритм нахождения обратной матрицы следующим образом: вначале запишем в редакторе *Word* присоединенную матрицу C, после чего в программе *Excel* найдем обратную матрицу A^{-1} для матрицы A.

1. Включите компьютер.
2. Откройте окно *Microsoft Word*.
3. Вставьте объект *Microsoft Equation 3.0*.
4. Перепишите алгебраические дополнения в формульный редактор. Для этого:

- запишите алгебраическое дополнение A_{12}, используя шаблон нижних индексов;
- вставьте шаблон определителя 3-го порядка в формульном редакторе;
- занесите числовые значения определителя в свободные поля.

Повтором предыдущих действий запишите в редакторе формул дополнения $A_{12} - A_{44}$ (см. рисунок 7)



$$A_{11}=\begin{vmatrix}3&2&1\\10&9&7\\8&9&2\end{vmatrix},\ A_{21}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}5&4&1\\3&2&1\\8&9&2\end{vmatrix},\ A_{31}=\begin{vmatrix}5&4&1\\3&2&1\\8&9&2\end{vmatrix},\ A_{41}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}5&4&1\\3&2&1\\10&9&7\end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\2&9&7\\3&9&2\end{vmatrix},\ A_{22}=\begin{vmatrix}2&4&1\\2&9&7\\3&9&2\end{vmatrix},\ A_{32}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}2&4&1\\1&2&1\\3&9&2\end{vmatrix},\ A_{42}=\begin{vmatrix}2&4&1\\1&2&1\\2&9&7\end{vmatrix},$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1&3&1\\2&10&7\\3&8&2\end{vmatrix},\ A_{23}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}2&5&1\\2&10&7\\3&8&2\end{vmatrix},\ A_{33}=\begin{vmatrix}2&5&1\\1&3&1\\3&8&2\end{vmatrix},\ A_{43}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}2&5&1\\1&3&1\\2&10&7\end{vmatrix},$$

$$A_{14}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}1&3&2\\2&10&9\\3&8&9\end{vmatrix},\ A_{24}=\begin{vmatrix}2&5&4\\2&10&9\\3&8&9\end{vmatrix},\ A_{34}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}2&5&4\\1&3&2\\3&8&9\end{vmatrix},\ A_{44}=\begin{vmatrix}2&5&4\\1&3&2\\2&10&9\end{vmatrix}$$

Рисунок 7

В качестве вычислительного средства воспользуемся инструментами программы *Excel*.

5. Откройте окно *Microsoft Excel*.
6. Перепишите матрицу А и формулу (1) из *Word* в *Excel* (см. рисунок 8).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	2	5	4	1											
2	1	3	2	1											
3	2	10	9	7											
4	3	8	9	2											
5															
6	3	2	1		5	4	1		5	4	1		5	4	1
7	10	9	7		10	9	7		3	2	1		3	2	1
8	8	9	2		8	9	2		8	9	2		10	9	7
9															
10	1	2	1		2	4	1		2	4	1		2	4	1
11	2	9	7		2	9	7		1	2	1		1	2	1
12	3	9	2		3	9	2		3	9	2		2	9	7
13															
14	1	3	1		2	5	1		2	5	1		2	5	1
15	2	10	7		2	10	7		1	3	1		1	3	1
16	3	8	2		3	8	2		3	8	2		2	10	7
17															
18	1	3	2		2	5	4		2	5	4		2	5	4
19	2	10	9		2	10	9		1	3	2		1	3	2
20	3	8	9		3	8	9		3	8	9		2	10	9
21															

Рисунок 8

Используя функцию МОПРЕД, которая находится в мастере функций f_x, посчитаем, чему будут равны все алгебраические дополнения. Для этого:

- активизируйте ячейку D9;
- выполните нажатие ЛКМ на кнопке f_x **Строки формул**;
- в окне категория нажатием ЛКМ выберите математические, а в окне функция – МОПРЕД;
- выделите область A6÷C8;
- выполните нажатие ЛКМ на кнопке **ОК** (рисунок 9).

D9 fx =МОПРЕД(A6:C8)

	A	B	C	D
1	2	5	4	1
2	1	3	2	1
3	2	10	9	7
4	3	8	9	2
5				
6	3	2	1	
7	10	9	7	
8	8	9	2	
9				-45

Рисунок 9

Аналогичные действия проделайте со всеми остальными алгебраическими дополнениями, не забывая при этом некоторые из них умножать на число (-1). В результате проделанных действий получим: $A_{11} = -45$, $A_{12} = 20$, $A_{13} = 1$, $A_{14} = -17$, $A_{21} = 63$, $A_{22} = -31$, $A_{23} = 1$, $A_{24} = 25$, $A_{31} = -6$, $A_{32} = 3$, $A_{33} = 3{,}33E-16$, $A_{34} = -3$, $A_{41} = 12$, $A_{42} = 5$, $A_{43} = -1$, $A_{44} = 5$.

Как видите, значение алгебраического дополнения A_{33} записано в виде числа с мантиссой. Приведем это число к виду обыкновенной десятичной дроби. Для этого:

- активизируйте ячейку L17, после чего выполните нажатие ПКМ;
- на экране компьютера появится контекстное меню;
- выполните нажатие ЛКМ на команде **Формат ячеек** (рисунок 10);

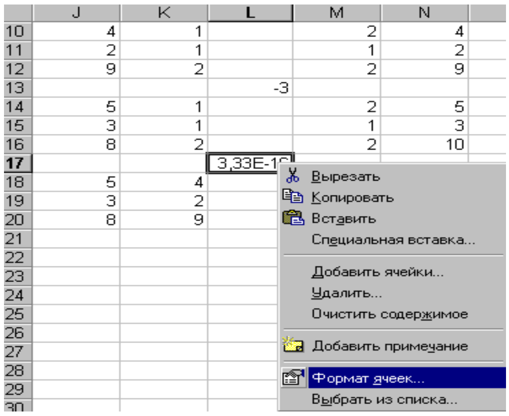


Рисунок 10

- после появления диалогового окна Формат ячеек в окне Числовые форматы нажмите ЛКМ на **Дробный**, а в окне **Тип** – выберите **Простыми дробями** (рисунок 11);
- выполните нажатие ЛКМ на кнопке **ОК**. После чего алгебраическое дополнение A_{33} станет равным нулю (см. рисунок 12).

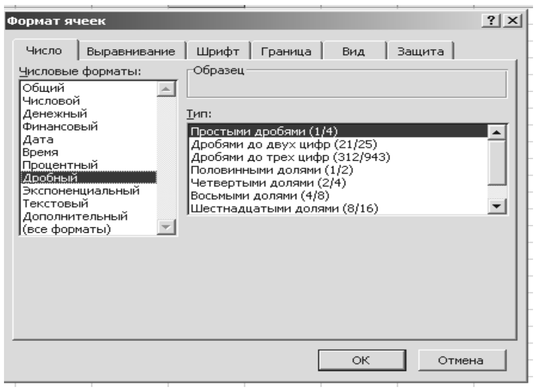


Рисунок 11

7. Найдем в *Excel* матрицу A^{-1}**,** обратную для A. Для этого:

- заполните ячейки A22÷D26 значениями алгебраических дополнений, в ячейках A23÷D26 записана присоединенная матрица c (рисунок 13);

L17 fx =МОПРЕД(I14:K16)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
10									2	4	1	
11									1	2	1	
12									3	9	2	-3
13								-31				
14									2	5	1	
15									1	3	1	
16									3	8	2	
17								-1				0

Рисунок 12

D26 = 5

	A	B	C	D
22				
23	-45	63	-6	12
24	20	-31	3	-5
25	1	1	0	-1
26	-17	25	-3	5

Рисунок 13

- активизируйте ячейку A28 и запишите с клавиатуры в нее формулу: $= A23/(-3)$, после чего результат занесите автозаполнением в ячейки B28÷D28; A29÷A31 и B29÷D31 (рисунок 14);

A28 = =A23/-3

	A	B	C	D
22				
23	-45	63	-6	12
24	20	-31	3	-5
25	1	1	0	-1
26	-17	25	-3	5
27				
28	15	-21	2	-4
29	-6,66667	10,33333	-1	1,666667
30	-0,33333	-0,33333	-1,1E-16	0,333333
31	5,666667	-8,33333	1	-1,66667

Рисунок 14

- выделите область A28÷D31, после чего поменяйте формат выделенных ячеек на **Дробный** (см. рисунок 15).

A28 = =A23/-3

	A	B	C	D
27				
28	15	-21	2	-4
29	-6 2/3	10 1/3	-1	1 2/3
30	- 1/3	- 1/3	-0	1/3
31	5 2/3	-8 1/3	1	-1 2/3

Рисунок 15

8. Проверку проделанных вычислений произведем следующим образом:

- выделите область F28÷I31;
- воспользуйтесь функцией МОБР, которая находится в **Мастере функций** f_x (категория – **Математические**);
- на клавиатуре одновременно нажмите следующую комбинацию клавиш: **Shift+Ctrl+Enter**.

В результате чего в ячейках появятся следующие значения (рисунок 16).

F28 = {=МОБР(A1:D4)}

	F	G	H	I
28	15	-21	2	-4
29	-6 2/3	10 1/3	-1	1 2/3
30	- 1/3	- 1/3	-0	1/3
31	5 2/3	-8 1/3	1	-1 2/3

Рисунок 16

Полученные значения доказывают правильность произведенных вычислений.

Следующий вопрос, с которым нам предстоит разобраться в ходе этой лабораторной работы, – решение систем линейных уравнений матричным методом. Теория этого вопроса нами рассматривалась в главе 1.10. курса математики.

Решим следующую систему уравнений с 4-мя неизвестными, используя этот метод:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$$

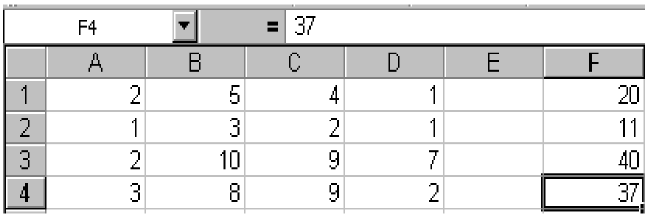
Переписав систему в матричном виде, получим, что неизвестная матрица $X = A^{-1} \cdot B$, где $\Delta A \neq 0$.

Чтобы найти неизвестные элементы матрицы X, т.е. x_1, x_2, x_3, x_4, необходимо:

- составить матрицу A из коэффициентов при неизвестных;
- составить матрицу B из свободных членов;
- найти обратную для матрицы A матрицу A^{-1};
- перемножить матрицы A^{-1} и B.

В качестве вычислительного средства воспользуемся инструментами программы Excel.

1. Заполните ячейки A1÷D4 таблицы значениями элементов матрицы A.
2. Заполните ячейки F1÷F4 таблицы значениями элементов матрицы B (рисунок 17).



F4 = 37

	A	B	C	D	E	F
1	2	5	4	1		20
2	1	3	2	1		11
3	2	10	9	7		40
4	3	8	9	2		37

Рисунок 17

3. Найдем матрицу A^{-1}. Для этого:

- выделите область A6÷D9;
- воспользуйтесь функцией МОБР, которая находится в **Мастере функций** f_x в категории – **Математические** (рисунок 18).

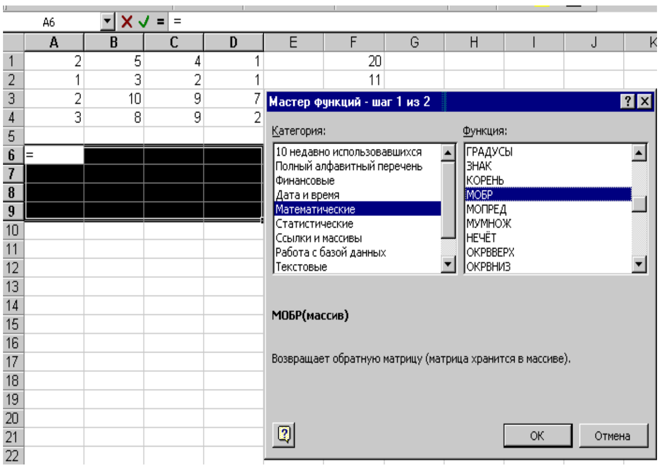


Рисунок 18

- в окне **Массив** запишите область A1**:**D4;
- после чего одновременно нажмите на клавиатуре следующую комбинацию клавиш: **Shift+Ctrl+Enter**.

В результате получим обратную матрицу, значения элементов которой записаны в виде чисел с мантиссой, следовательно:

- поменяйте форматы ячеек A1÷D4 на **Дробный**, после чего получится матрица A^{-1}, имеющая следующий вид – см. рисунок 19.

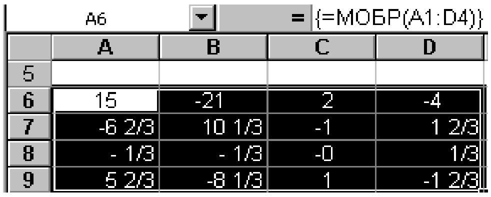


Рисунок 19

4. Теперь нам осталось найти неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4.

- выделите область F6÷F9;
- воспользуйтесь функцией МУМНОЖ, которая находится в **Мастере функций** f_x в категории – **Математические**;
- в окне **Массив 1** выделите область A6:D9, а в окне **Массив 2** выберите область F1:F4;

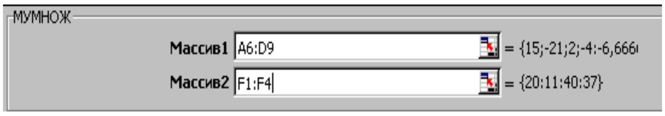


Рисунок 20

- после чего одновременно нажмите на клавиатуре следующую комбинацию клавиш: **Shift+Ctrl+Enter**.

В результате $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2{,}13E-14$, поэтому поменяем формат ячейки F9 на **Дробный**, после чего x_4 – будет равно нулю (см. рисунок 21).

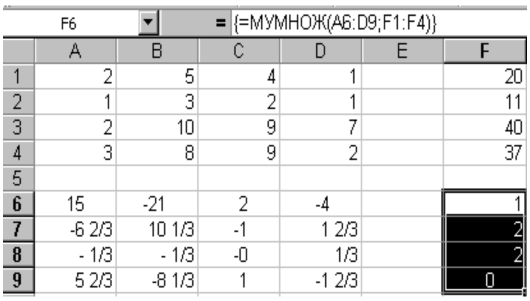


Рисунок 21

Далее рассмотрим решение систем линейных уравнений методом Гаусса, теория этого вопроса была рассмотрена нами в главе 1.11. В этой лабораторной работе мы рассмотрим реализацию метода Гаусса на примере той же системы, что и в матричном методе, т.е.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$$

Следует напомнить, что суть метода Гаусса состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую. Однако при решении систем этим методом удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя все преобразования над ее строками. В нашем случае расширенная матрица будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{pmatrix}$$

Последовательно получающиеся в ходе преобразований матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности.

Произведем анализ строк расширенной матрицы:

- к элементам 2-ой строки прибавим элементы 1-ой, деленные на (-2);
- из 3-ей строки вычтем 1-ю строку;
- к 4-ой строке прибавим 1-ю, умноженную на (-3/2).

В качестве вычислительного средства воспользуемся инструментами программы *Excel*.

1. Заполните ячейки таблицы значениями расширенной матрицы (рисунок 22).

E4 = 37

	A	B	C	D	E
1	2	5	4	1	20
2	1	3	2	1	11
3	2	10	9	7	40
4	3	8	9	2	37

Рисунок 22

2. Для выполнения выбранного словесного алгоритма производите следующие действия:

- активизируйте ячейку A5 и с клавиатуры занесите в нее формулу вида =A2+A1/(-2), после чего автозаполнением занесите численные результаты в ячейки B5÷E5;
- в ячейке A6 разместим результат вычитания 1-ой строки из 3-ей и снова, пользуясь автозаполнением, заполним ячейки B6÷E6;
- в ячейке A7 запишем формулу вида =A4+A1*(-3/2) и автозаполнением занесем численные результаты в ячейки B7÷E7;
- далее скроем 2, 3 и 4 – строки, которые нам уже не нужны. Для этого воспользуемся пунктом меню **Формат→Строка→Скрыть**. Результат показан на рисунке 23.

A2 = 1

	A	B	C	D	E
1	2	5	4	1	20
5	0	0,5	0	0,5	1
6	0	5	5	6	20
7	0	0,5	3	0,5	7

Рисунок 23

3. Снова произведите анализ строк, получившихся в результате элементарных преобразований матрицы, чтобы привести ее к треугольному виду.

- К 6-ой строке прибавьте 5-ю, умноженную на число (-10);
- из 7-ой строки вычтите 5-ю.

Записанный алгоритм реализуется в ячейках A8, A9, после чего скройте 6 и 7 строки (см. рисунок 24).

E9 = =E7-E5

	A	B	C	D	E
1	2	5	4	1	20
5	0	0,5	0	0,5	1
8	0	0	5	1	10
9	0	0	3	0	6

Рисунок 24

4. И последнее, что нужно сделать, чтобы привести матрицу к треугольному виду, – это к 9-ой строке прибавить 8-ю, ум-

ноженную на (-3/5), после чего скрыть 9-ю строку (рисунок 25).

E10		=E9+E8*(-3)/5			
	A	B	C	D	E
1	2	5	4	1	20
5	0	0,5	0	0,5	1
8	0	0	5	1	10
10	0	0	0	-0,6	0

Рисунок 25

Как вы можете видеть, элементы получившейся матрицы находятся в 1, 5, 8 и 10 строках, при этом ранг получившейся матрицы $r = 4$, следовательно, данная система уравнений имеет единственное решение. Выпишем получившуюся систему:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 &= 20, \\ 0{,}5x_2 + 0{,}5x_4 &= 1, \\ 5x_3 + x_4 &= 10, \\ -0{,}6x_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения легко находим $x_4 = 0$; поднимаясь по системе вверх, из 3-го уравнения находим $x_3 = 2$; из 2-го – $x_2 = 2$ и из 1-го – $x_1 = 1$ соответственно. Сравните результаты, полученные при решении этой же системы матричным методом, – они совпадают.

Для закрепления навыков рассмотренной лабораторной работы компьютерного практикума вам предстоит выполнить самостоятельно задания, которые снабжены ответами для контроля правильности их выполнения.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти ранги заданных матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}; \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответы: $r(A) = r(B) = r(C) = r(D) = 4$.

2. Найти матрицы, обратные заданным матрицам предыдущего задания.

Ответы: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & -1 \\ 1 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0 \\ -1 & 1{,}5 & -0{,}5 & 0 \\ -4 & 1{,}5 & -0{,}5 & 2 \end{pmatrix}$;

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-1}{7} \\ 1\frac{2}{7} & -2\frac{11}{14} & \frac{2}{7} & \frac{-5}{14} \\ \frac{-1}{7} & \frac{9}{14} & \frac{-1}{7} & \frac{-1}{14} \\ \frac{-1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

(числовой формат – дробный (дробями до двух цифр));

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 6\frac{1}{3} & -4\frac{1}{6} & -2\frac{1}{3} & 2\frac{5}{6} \\ -5 & 3\frac{1}{2} & 2 & -2\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{-1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(числовой формат – дробный (дробями до трех цифр));

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{14}{53} & \frac{9}{53} & \frac{4}{53} & \frac{-5}{53} \\ \frac{-9}{53} & \frac{-2}{53} & \frac{5}{53} & \frac{7}{53} \\ \frac{20}{53} & \frac{-25}{53} & \frac{-17}{53} & 1\frac{8}{53} \\ \frac{7}{53} & \frac{-22}{53} & \frac{2}{53} & \frac{24}{53} \end{pmatrix}$$

(числовой формат – дробный (дробями до двух цифр)).

3. Решить системы уравнений матричным методом:

3.1 $\begin{cases} 8{,}3x_1 + 2{,}62x_2 + 4{,}1x_3 + 1{,}9x_4 = -10{,}65 \\ 3{,}92x_1 + 8{,}45x_2 + 7{,}12x_3 + 2{,}46x_4 = 12{,}21 \\ 3{,}77x_1 + 7{,}21x_2 + 8{,}04x_3 + 2{,}28x_4 = 15{,}45 \\ 2{,}21x_1 + 3{,}65x_2 + 1{,}69x_3 + 6{,}99x_4 = -8{,}35. \end{cases}$

Ответ: $\left(-2\frac{5}{7}; \frac{1}{3}; 3\frac{1}{4}; -1\frac{2}{7}\right)$.

3.2 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 2, \\ \quad 12x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 4, \\ 11x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 12, \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

Ответ: $\left(1; \frac{-1}{3}; \frac{-2}{3}; 1\right)$.

3.3 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 8, \\ 7x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$

Ответ: $\left(1\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; 3; \frac{1}{3}\right)$.

3.4 $\begin{cases} 3{,}1x_1 + 1{,}5x_2 + x_3 + 0{,}4x_4 = 10{,}83 \\ 1{,}5x_1 + 2{,}5x_2 + 0{,}5x_3 = 9{,}2 \\ x_1 + 0{,}5x_2 + 4{,}2x_3 + 3{,}4x_4 = 17{,}1 \\ 3{,}01x_1 - 4{,}5x_2 + 0{,}3x_3 + 2x_4 = 3{,}12. \end{cases}$

Ответ: $\left(1\frac{7}{9}; 2\frac{5}{6}; -1; 5\frac{3}{7}\right)$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса

4.1 $\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

Ответ: $(-0{,}4; -1{,}2; 3{,}4; 1)$.

4.2 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 = -4, \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 = -7. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; \frac{-2}{3}; 2; -3\right)$.

4.3 $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -4, \\ 9x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 13, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 9x_2 + 2x_4 = 11. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{2}{3};-1;1\frac{1}{2};0\right)$.

4.4 $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7. \end{cases}$

Ответ: $(2;1;-3;1)$.

В завершении лабораторной работы желаем вам успехов в освоении рассмотренного материала.

Конец лабораторной работы № 2

Лабораторная работа № 3

В этой лабораторной работе Вы приступаете к решению систем линейных уравнений по формулам Крамера. С теорией этого вопроса Вы познакомились в главе 1.9. курса математики. Но мы напомним некоторые теоретические вопросы, необходимые для решения систем по формулам Крамера.

Пусть дана система n – линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

В системе вида (1) числа $a_{11}, a_{12}, ..., a_{nn}$ называют коэффициентами при неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, а числа $b_1, b_2, ..., b_n$ - свободными членами системы.

Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных (2), и её определитель (3) называются соответственно **матрицей системы** (1) и **определителем этой системы**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Далее составляются вспомогательные определители при первой, второй, …, n-ой неизвестной. Их будем обозначать той же буквой Δ, только с индексами, т.е. Δ_1, Δ_2,…, Δ_n.

Составляются вспомогательные определители из главного определителя с помощью замены столбца коэффициентов при соответствующей неизвестной столбцом свободных членов, т. е., например, первый вспомогательный определитель будет иметь вид:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Составляются остальные вспомогательные определители Δ_k, где Δ_k– определитель, получающийся из Δ заменой k –го столбца свободными членами системы:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Если $\Delta \neq 0$, то находим

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \qquad (6)$$

Полученные формулы называются **формулами Крамера**; они дают решение системы (1).

Решим следующую систему уравнений с 4-мя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$$

В соответствии с правилами составления определителей составим главный и вспомогательный определители.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

главный определитель системы;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 20 & 5 & 4 & 1 \\ 11 & 3 & 2 & 1 \\ 40 & 10 & 9 & 7 \\ 37 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 20 & 4 & 1 \\ 1 & 11 & 2 & 1 \\ 2 & 40 & 9 & 7 \\ 3 & 37 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 20 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 1 \\ 2 & 10 & 40 & 7 \\ 3 & 8 & 37 & 2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 37 \end{vmatrix}$$

вспомогательные определители системы.

В этой лабораторной работе мы не будем прибегать к текстовому процессору *MS Word* для записи определителей системы, а сразу будем вести вычисления в программном пакете *MS Excel*. Для этого необходимо:

- загрузить программный продукт *MS Excel*, на одном из листов открытой книги в диапазон ячеек A1:D4, ввести значения определителя Δ, рисунок 1;
- выделив ячейку E5, выбрать функцию МОПРЕД, которая находится в мастере функций f_x в категории Математические;
- выполнить нажатие ЛКМ на 1-й элемент определителя, который находится в ячейке A1, и перетащить указатель мыши по главной диагонали заданного значениями диапазона до ячейки D4).

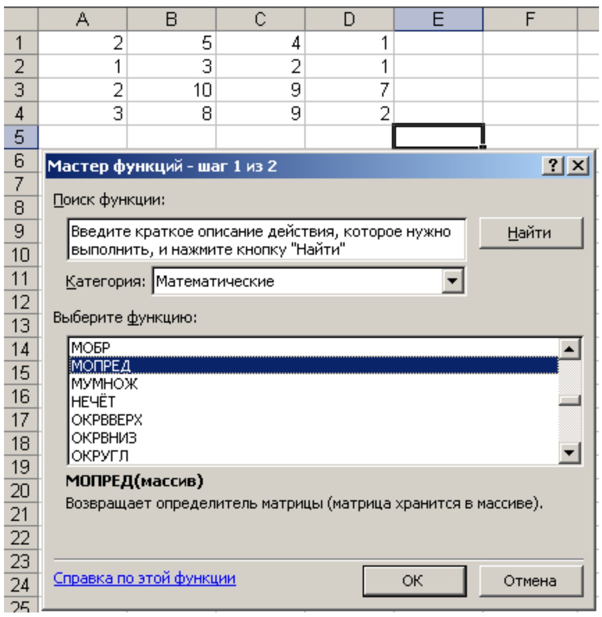


Рисунок 1

Результат вычислений появится в ячейке E5 (см. рисунок 2).

Аналогично введите на этот же лист открытой книги *Excel* значения коэффициентов, соответствующих вспомогательным определителям.

А именно в ячейки A6:D9 – первый вспомогательный, в ячейки A11:D14 – второй вспомогательный, в ячейки A16:D19 – третий вспомогательный, в ячейки A21:D37 – четвертый вспомогательный.

Таким же образом, как мы нашли значение главного определителя с помощью функции МОПРЕД, вычислите значения всех вспомогательных определителей.

Т. е., в ячейке E10 – первый вспомогательный, в E15 – второй вспомогательный, в E20 – третий вспомогательный, в E25 – четвертый вспомогательный, см. рисунок 2.

Обращаем ваше внимание на то значение, которое отображено в ячейке E25 рисунка 2. Оно соответствует значению четвертого вспомогательного определителя. Это число равно $-1{,}11022 \cdot 10^{-14}$, т. е. оно очень мало. Так как результат вычислений определителя Δ_4 записан в виде числа с мантиссой, следовательно, *поменяем формат ячейки* E25 на **ДРОБНЫЙ**, после чего определитель Δ_4 станет равным нулю.

E25 fx =МОПРЕД(A21:D24)

	A	B	C	D	E
1	2	5	4	1	
2	1	3	2	1	
3	2	10	9	7	
4	3	8	9	2	
5					-3
6	20	5	4	1	
7	11	3	2	1	
8	40	10	9	7	
9	37	8	9	2	
10					-3
11	2	20	4	1	
12	1	11	2	1	
13	2	40	9	7	
14	3	37	9	2	
15					-6
16	2	5	20	1	
17	1	3	11	1	
18	2	10	40	7	
19	3	8	37	2	
20					-6
21	2	5	4	20	
22	1	3	2	11	
23	2	10	9	40	
24	3	8	9	37	
25					-1,11022E-14

Рисунок 2

В соответствии с формулами (6) найдём неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4.

Для этого:

активизируйте ячейку G10 и запишите в нее формулу:

= =E10/E5, после чего нажмите на клавишу **Enter**.

В результате получим $x_1 = 1$.

Активизируйте ячейку G15 и запишите в нее формулу:

= =E15/E5, после чего нажмите на клавишу **Enter**.

В результате получим $x_2 = 2$.

Активизируйте ячейку G20 и запишите в не формулу:

= =E20/E5, после чего нажмите на клавишу **Enter**.

В результате получим $x_3 = 2$.

Активизируйте ячейку G25 и запишите в не формулу:

= =E25/E5, после чего нажмите на клавишу **Enter**.

В результате получим $x_4 = 0$.

Итак, полученное по формуле Крамера решение системы четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными содержится в ячейках G10, G15, G20, G25, рисунок 3.

G25 fx =E25/E5

	C	D	E	F	G
2	2	1			
3	9	7			
4	9	2			
5			-3		
6	4	1			
7	2	1			
8	9	7			
9	9	2			
10			-3		1
11	4	1			
12	2	1			
13	9	7			
14	9	2			
15			-6		2
16	20	1			
17	11	1			
18	40	7			
19	37	2			
20			-6		2
21	4	20			
22	2	11			
23	9	40			
24	9	37			
25			-0		0

Рисунок 3

Полученный ответ системы можно записать в виде: $(1;2;2;0)$. Для проверки правильности решения системы предлагаем вам самостоятельно подставить найденные значения переменных в каждое уравнение системы и проверить выполнимость тождественного равенства.

Для закрепления решения систем по формуле Крамера с помощью программного пакета *MS Excel* предлагаем вам самостоятельно решить системы предложенные ниже.

Задания для самостоятельной работы

Решить системы по формуле Крамера и выполнить проверку решений:

1). $\begin{cases} 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37, \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6, \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12, \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6. \end{cases}$

Ответ: $(-5\frac{1}{6};-5\frac{1}{6};5\frac{1}{6};23\frac{2}{3})$.

2). $\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2, \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3, \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3. \end{cases}$

Ответ: $(-2;0;1;-1)$.

3). $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+3x_4=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3-15x_4=-3, \\ x_1+2x_2-4x_4=-3, \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22. \end{cases}$

Ответ: $(-150\frac{4}{9};13\frac{2}{5};-114\frac{1}{3};30\frac{1}{6})$.

4). $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_4=-3, \\ x_1+3x_2+x_3-3x_4=-6, \\ 3x_1+4x_2-x_3+2x_4=0, \\ x_1+3x_2+x_3-x_4=2. \end{cases}$

Ответ: $(-2\frac{2}{5};1;5\frac{1}{7};4)$.

5). $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$

Ответ: $(0; 2; \frac{1}{3}; -1\frac{1}{2})$.

6). $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = -8, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -8. \end{cases}$

Ответ: $(2; -2; 1; -1)$.

Уважаемые студенты, завершением компьютерного практикума по линейной алгебре будет выполнение вами контрольного компьютерного практикума, представленного 25 заданиями.

Желаем вам успехов в выполнении третьей лабораторной работы и заданий контрольного компьютерного практикума.

Конец лабораторной работы № 3

Все замечания и предложения отсылайте по адресу: feedback@rfei.ru.